

# 수학공부법 2탄 - 의사소통

안녕하세요. ㅎㅎ

초성민 수학선생님입니다.

앞서 제가 얘기했듯이 다섯 가지 수학적 능력 을 이야기 하였으며,  
[개념 이해능력] 은 이전 칼럼으로 올렸으며  
이번 칼럼은 문제의 시작과 진행에 있어서 원동력이 되는  
의사소통 능력입니다.

의사소통(communication, 意思疏通) : 가지고 있는 생각이나 뜻이 서로 통하는 것.

수학에서 웬 의사소통 ??

‘2009 개정 교육과정에 따른 수학과 성취기준  
및 성취기준 개발 연구’

‘2009 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학과  
핵심 성취기준 개발 연구’

두 보고서에서는

‘의사소통’ 이란 단어를 쉽게 많이 찾을 수 있습니다.

실제로 위 보고서에서는

〈수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력〉

을 평가한다고 하였는데...

다른 능력들과 마찬가지로 너무나 추상적으로 표현했네요.

ㅋㅋㅋ

그냥 수학은 수학 잘하는 애들이 잘하는 것 같고  
뭔 소리인지 이해 못하겠죠.

그래서..

저는 제 입맛대로 다섯 가지 능력을  
평가원 기준에서 학생들의 시선으로 재정비했으며  
그중에 '의사소통' 능력은 많은 고민 끝에  
하나의 영역을 자리 잡은 능력입니다.

제가 정한 기준에서  
의사소통이란  
정말 말 그대로  
“ 얼마나 커뮤니케이션 을 잘하고 있는가? ”  
입니다.

의사소통을 하기 위해서는 대상이 있어야하는데요.

그 대상은 다름 아닌  
수학문제입니다.

특히나 이번 개정수학에서는  
저는 확신컨대 의사소통하는 능력이  
더더욱 중요할 것이라고 생각합니다.  
[수II 집합과 명제 + 함수 가 문과 직접, 이과 간접범위로 등장]

그럼 지금부터  
여러분이 주의해야 할  
의사소통능력에 관해

몇 가지 형태들을 나열해 보겠습니다.

- 의사소통의 형태 -

- ① 실생활 응용 및 장문문장.
- ② 다른 언어로 표현.
- ③ 복잡한 정의의 '예를 들어'
- ④ 개념이 짝차있을 때의 의사소통.

# ① 실생활 응용 및 장문문장.

가장 단순한 의사소통능력이라 볼 수 있습니다.  
 특히 실생활응용이라는 곳에서 다양한 소재가 등장하고  
 그것을 식 으로 표현해야 합니다.

우선 문장과 문제가 굉장히..  
깁니다. 길어요.

길다보니 읽기 싫고 너무 대충 읽다가 주어진  
 Hint를 제대로 사용 못하는 경우도 허다합니다.

## [2006학년도 6월 고1 전국연합학력평가 문제지]

연료탱크의 용량의 비가 3:4인 소형차와 중형차의 연비(연료 1L당 주행거리)를  
 비교하기 위해 두자동차의 속도를 같게 하여 주행실험을 실시하였다.  
 두 자동차에 연료를 가득 채우고 320km를 주행 후 확인한 소형차와 중형차의  
 연료탱크에 남은 연료량의 비는 7:10이었고, 다시 연료를 채우고 400km를 주행 후  
 확인한 연료탱크에 남은 연료량의 비는 2:3 이었을 때, 소형차와 중형차의 연비의  
 비는  $a:b$  이다.  $ab$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 서로소)

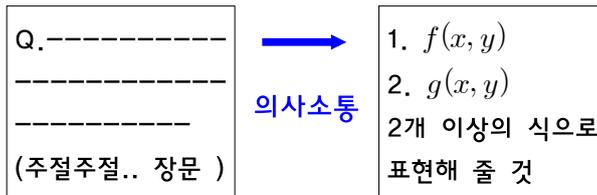
글이 길고 복잡하다. ‘연비가 뭔지 모르겠는데 어찌라고’ 라는 식의  
 삐딱한 시선은 곤란하다.

- ① 연료를 가득 채우고 320km를 주행 후 확인한 소형차와 중형차의  
 연료탱크에 남은 연료량의 비는 7:10
- ② 연료를 채우고 400km를 주행 후 확인한 연료탱크에  
 남은 연료량의 비는 2:3

라는 문장에서 식 2개가 등장하고  
 문자는 2개 이상이 등장하지만,  
 어차피 “ $a:b$  이다.  $ab$ 의 값은?”  
 비율을 구하는 문제이다.

(식이 부족하더라도, 비율은 구할 수 있다.)

**\* 길고 긴 식에서 정확한 정보를 갖고 오자.**  
 (단순 의사소통)



## ② 다른 언어로 표현.

다음 문제를 풀어보세요.

Q1. 집합  $X = \{x, y, z\}$ 에 대하여 집합  $S$ 는 집합  $X$ 의 부분집합을  
원소로 가지면서 다음의 성질을 만족한다

(가)  $X \in S, \emptyset \in S$

(나)  $Y \in S, Z \in S$ 이면  $Y \cup Z \in S, Y \cap Z \in S$

이때, 원소를 5개 가지는 집합  $S$ 의 개수를 구하여라. [숨마쿰라우데]

풀고 난 후,  
다음 문제도 풀어보세요.

Q2. 집합  $X = \{x, y, z\}$ 에 대하여 집합  $P$ 에 대하여,  
 $P = \{S \mid S \subset X\}$ 라고 정의할 때, 다음 조건을 만족한다.

(가)  $X \in S, \emptyset \in S$

(나)  $Y \in S, Z \in S$ 이면  $Y \cup Z \in S, Y \cap Z \in S$

(다)  $n(S) = 5$

이 때,  $n(P)$ 의 값을 구하여라. [자작]

풀어보시면 알겠지만,

Q1과 Q2는 완전히 똑같은 문제입니다.

**다만 표현이 완전히 다르죠.**

저런 다른 표현이 와도 위 문제처럼 풀려야 하는 것은  
단단한 개념 속에 문제를 읽어가는 능력이라 생각합니다.

아래 문제를 읽자마자 위 문제처럼 읽힌다면  
다르게 표현이 되더라도 그 개념에 대해서는 잘 잡혀있다고 볼 수 있습니다.

**\* 익숙치 않은 혹은 복잡한 표현들에 대해서  
얼마나 빠르게 쉽게 해석할 수 있는 능력.**

### ③ 복잡한 정의의 '예를 들어'

[2016년 3월 고3 전국연합학력평가]

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\text{집합 } A = \{x \mid x^2 - 1 < a < x^2 + 2x, x \text{ 는 자연수}\}$$

가 공집합이 되도록 하는 자연수  $a$ 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때,  $n$ 번째 수를  $a_n$ 이라 하자.

**예를 들어**,  $a=3$ 은  $x^2 - 1 < a < x^2 + 2x$ 를 만족시키는 자연수  $x$ 가

존재하지 않는 첫 번째 수이므로  $a_1 = 3$ 이다.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{3}{4}$       ③ 1      ④  $\frac{5}{4}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

비교적 따끈따끈한 문제인데요.  
여기서 제가 주목할 것은 **예를 들어**입니다.

저는 수업할 때  
**예를 들어**에 항상 주목합니다.  
그 이유는

'예를 들어'로 시작된 예시는

아주 확실한 정보를 하나 던져줬다고 생각 할 수도  
있습니다.

**예를 들어**에서 위와 같이  $a_1 = 3$ 을 알려준 것이기에,  
여러분은 이를 한번 확인하면서 (정답을 알려준 거잖아요)  
 $a_n$ 의 성질을 일반화 시키는 것이 중요합니다.

이는 수열뿐만 아니라,  $f(k)$  형태의  
문제 속에 새롭게 정의하는 함수에서도 해당이 됩니다.

따라서

**\* '예를 들어'가 있을 경우 확실한 결론이 있는  
것이므로, 직접 예를 든 값을 확인하길 추천.**

## ④ 개념이 꼭차있을 때의 의사소통.

최종적으로 여러분이 진행해야 될 상태입니다.  
 수학을 문제를 읽었을 때 단순히 문제 보이는 꼴이곧대로  
 받아들이는 습관은 접어주세요.  
 문제를 읽는 순간에도 문제를 풀어나가는 과정의 시작입니다.

### 2013학년도 6월 모의평가 가형 26번

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수  $f(x)$  가 있다. 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(2, 1)$  에서의 접선의 기울기는 1 이다. 함수  $f(2x)$  의 역함수를  $g(x)$  라 할 때, 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(1, a)$  에서의 접선의 기울기는  $b$  이다.  $10(a+b)$  의 값을 구하시오.

실수 전체의 집합에서 증가 하고 미분 가능 한 함수  $f(x)$  가 있다.

[ 사실은 역함수의 존재 조건으로 역함수를 떠올리게 하는 힌트이지만, 문제에서 직접 역함수 언급을 했기 때문에 크게 신경 쓸 필요는 없다. (의사소통능력) ]

$y=f(x)$ , 점  $(2, 1)$  에서의 접선의 기울기는 1  $\Rightarrow f(2)=1, f'(2)=1$  [개념의 활용]

함수  $f(2x)$  의 역함수를  $g(x)$ ,  $y=g(x)$  위의 점  $(1, a)$  에서의 접선의 기울기는  $b$

$\Rightarrow g(1)=a, g'(1)=b$  [복잡하고 긴 문장을 수학적으로 깔끔하게 표현하고 넘어가자]

[의사소통능력]  
[개념의 활용]

[위 문제의 표는, 현재 제가 쓰고 있는 기출분석집의 해설입니다. 답은 ]

보시는 바와 같이 문제를 읽자마자 요구할 생각의 전개가 많습니다.

위의 두 번째 행에 나오는 해설처럼, 문제를 읽고 풀어나가는 느낌이 아닌  
 읽자마자, 한 단어 혹은 한 문장의 조건을 보자마자, 머릿속에서는 사실 꼴이곧대로  
 받아들이는 것이 아닌, **그간 배운 개념으로 문제풀기 좋게끔 해석이 되어야 합니다.**

단순한 문제 & 복잡한 문제 모두 의사소통능력은  
 그 시작이 되며 뿌리가 됩니다.

문이과 공통 또 다른 예시문제)

Q. 역함수가 존재하는  $y = x^3 + nx^2 + a_n x + 4$  가 있다. 이 때,  
 $n$  에 관하여  $a_n$  이 가질 수 있는 정수 중 최댓값을  $f(n)$  이라 하자.

이 때,  $\sum_{n=1}^7 f(3n)$  의 값을 구하여라. [자작]

문제를 읽자마자, '역함수가 존재하는' 에 주목할 것.  
개념공부를 하면서, 일대일대응이어야 되고, 이는 또한 함수가 항상  
증가하거나 항상 감소하는 형태여야함 을 알 것이다.

고로 삼차함수가 항상 증가 혹은 감소해야하는데  
최고차항이 양수이므로  $f'(x) \geq 0$  이 항상 성립해야한다.

$n$  에 관하여  $a_n$ 이 가질 수 있는 정수 중 최댓값을  $f(n)$  이라 하자.  
라는 문장에서는, 자연스럽게 대입을 해나가면서 찾는 수 밖에 없다.  
마지막에  $f(3n)$  을 묻고 있으므로 처음부터  $3n$ 을 대입하는 것이 옳다.  
답은 420.

**\* 의사소통의 마무리는 개념완성이다.**  
**개념이 잘정리된 후에 의사소통은 막강한 힘을 보인다.**

..

이번수능에서는 집합과 명제+함수가 문과 직접 이과 간점으로  
들어가게 되었습니다.

저 단원들의 존재는 수학 문제를 만들 때  
문제에 적히는 다양한 표현을 풍요롭게 해주고 있습니다.

이번 시험에 있어 의사소통능력은 매우 중요해질 듯 합니다.

사실 많은 학생들이 문제를 풀다보면,  
'제대로 이해를 못해서' '뭔말인지 몰라서' 이렇게 틀리는 경우가 허다해서  
거기서부터 시작되는 의사소통 능력입니다.

공부를 더 많이 열심히하여, 저런 단편적인 의사소통부터,  
개념적인 요소까지 바라볼 수 있는 의사소통 능력을 쌓길 바랍니다.

**수학을 풀 때는**  
**절대로 문제를 허투루 읽지말자.**  
**문제속에 수많은 Hint 가 있다.**

끝까지 읽어주어 감사합니다.