수학 영역(나형)

1. $2^{\log_2 4} \times 8^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

2. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=P(B|A)=\frac{2}{3}$일 때, $P(A\cap B)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{18}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{7}{18}$　④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{1}{2}$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 실수 a가 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{17}{4}$　④ $\frac{26}{5}$　⑤ $\frac{37}{6}$

5. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은? [3점]

> (가) $20-\frac{1}{n} < a_n+b_n < 20+\frac{1}{n}$
> (나) $10-\frac{1}{n} < a_n-b_n < 10+\frac{1}{n}$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5\}$의 서로 다른 두 부분집합 X, Y에 대하여 $(X\cup Y)-(X\cap Y)$의 가장 작은 원소가 X에 속할 때, $X\Rightarrow Y$라 하자. U의 부분집합 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{1,2,5\}$, $C=\{2,4,5\}$에 대하여 옳은 것은? [3점]

① $A\Rightarrow B\Rightarrow C$ ② $A\Rightarrow C\Rightarrow B$ ③ $B\Rightarrow A\Rightarrow C$
④ $B\Rightarrow C\Rightarrow A$ ⑤ $C\Rightarrow A\Rightarrow B$

7. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=\log\frac{n+1}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2010} n a_n$의 값은? [4점]

① -2011　② -2010　③ 0　④ 2010　⑤ 2011

9. 1개의 본사와 5개의 지사로 이루어진 어느 회사의 본사로부터 각 지사까지의 거리가 표와 같다.

지사	가	나	다	라	마
거리(km)	50	50	100	150	200

본사에서 각 지사에 A, B, C, D, E를 지사장으로 각각 발령할 때, A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되도록 5명을 발령하는 경우의 수는? [4점]

① 50　② 52　③ 54　④ 56　⑤ 58

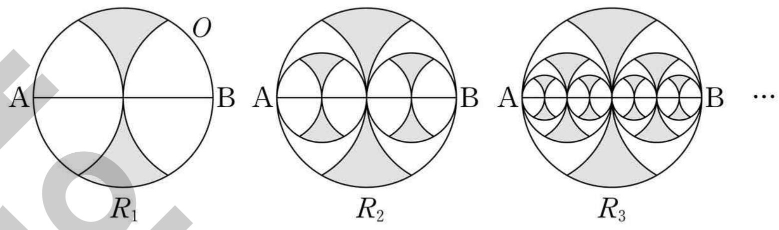
10. 100보다 작은 두 자연수 a, b $(a<b)$에 대하여 $\log a$의 소수부분과 $\log b$의 소수부분의 합이 1이 되는 순서쌍 (a,b)의 개수는? [4점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

11. 어느 공항에는 A, B 두 대의 검색대만 있으며, 비행기 탑승 전에는 반드시 공항 검색대를 통과하여야 한다. 남학생 7명, 여학생 7명이 모두 A, B 검색대를 통과하였는데, A 검색대를 통과한 남학생은 4명, B 검색대를 통과한 남학생은 3명이다. 여학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 A 검색대를 통과한 여학생일 확률을 p라 하자. B 검색대를 통과한 학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 남학생일 확률을 q라 하자. $p=q$일 때, A 검색대를 통과한 여학생은 모두 몇 명인가? (단, 두 검색대를 모두 통화한 학생은 없으며, 각 검색대로 적어도 1명의 여학생이 통과하였다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부와 공통부분인 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻을 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 두 도형에 색칠 하여 얻을 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 ⧖ 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$
④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

13. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1$이고, 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$의 값은? [4점]

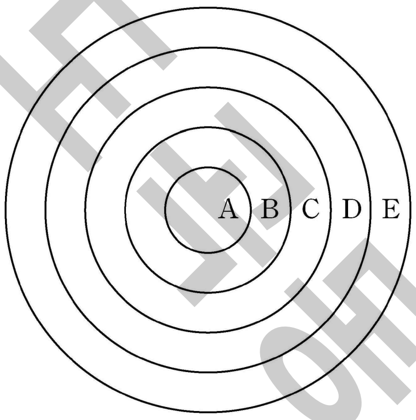
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

14. 집합 $A(k)$를 자연수 k를 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이라 하자. 예를 들면 $k=2$인 경우에 $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, … 이므로 $A(2)=\{2,4,6,8\}$이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $1 \in A(3)$
ㄴ. $A(6) \subset A(3)$
ㄷ. $A(3^n) = A(3)$인 자연수 n이 존재한다. (단, $n > 1$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

15. 그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 $1, 2, 3, 4, 5$인 다섯 개의 원이 있다. 이 다섯 개의 원을 경계로 하여 안에서부터 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E로 나누고, 서로 다른 3가지 색의 물감을 칠하여 색칠된 문양을 만들려고 한다. 각 영역은 1가지 색으로만 칠하고, 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠한다. 3가지 색의 물감은 각각 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이만큼만 칠할 수 있을 때, 만들 수 있는 서로 다르게 색칠된 문양의 개수는? [4점]



①$9$　②$12$　③$15$　④$18$　⑤$21$

16. a, b, c가 양의 실수일 때, 다음 연립부등식

$$\begin{cases} ax^2-bx+c<0 \\ cx^2-bx+a<0 \end{cases}$$

의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은? [4점]

① $a+c<\dfrac{b}{2}$　② $a+c<b$　③ $a+c<2b$
④ $a+c<1$　⑤ $a+c<2$

17. 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$는? [3점]

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

18. 자연수 n에 대하여 집합 A_n을

A={$x|x$는 n과 서로소인 자연수}

라고 할 때, <보기>중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $A_2=A_4$
ㄴ. $A_3=A_6$
ㄷ. $A_6=A_3\cap A_4$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 모든 자연수 n에 대하여, 다항식 $f_n(X)$는 다음 두 성질 (가)와 (나)를 갖는다.

(가) $f_1(X)=X^2$
(나) $f_{n+1}(X)=f_n(X)+f_n{}'(X)$

$f_{25}(X)$의 상수항은? [4점]

① 548 ② 550 ③ 552 ④ 554 ⑤ 556

20. 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 있다. 다음은 이 카드 중에서 동시에 3장을 선택할 때, 카드에 적힌 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다.

두 자연수 $m,\ n\ (2\le m\le n)$에 대하여 1부터 n까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드에서 동시에 m장을 선택할 때, 카드에 적힌 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수를 $N(n,m)$이라 하자.
9장의 카드에서 3장의 카드를 선택할 때, 9가 적힌 카드가 선택되는 경우와 선택되지 않는 경우로 나누면 $N(9,3)$에 대하여 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$N(9,3)=N(\text{(가)},2)+N(8,3)$$

$N(8,3)$에 8이 적힌 카드가 선택되는 경우와 선택되지 않는 경우로 나누어 적용하면

$$N(9,3)=N(\text{(가)},2)+N(6,2)+N(7,3)$$

이다. 이와 같은 방법을 계속 적용하면

$$N(9,3)=\sum_{k=3}^{7}N(k,2)$$

이다. 여기서

$$N(k,2)=\text{(나)}-(k-1)$$

이므로

$$N(9,3)=\text{(다)}$$

이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	7	${}_kC_2$	35
②	8	${}_{k+1}C_2$	48
③	7	${}_kC_2$	48
④	8	${}_kC_2$	48
⑤	7	${}_{k+1}C_2$	35

21. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$y=x^4-4x^3+10x-30$, $y=2x+2$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① -7 ② -3 ③ 1 ④ 5 ⑤ 9

단답형

22. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+9x-22}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 50 이하의 자연수 n중에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{}_{n}C_{k}$의 값이 3의 배수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.[3점]

24. 네 수 1, x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $6x+z=5y$를 만족시킨다. $x+y+z$의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,y)\,|\,x$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동 할 때, 선분 PQ의 길이는 1또는 $\sqrt{2}$ 이다.

점 $A(-2,0)$에서 점 $B(2,0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오. (단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.) [3점]

26. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_5=162$일 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k \geq 1000$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. [3점]

27. 다음 표와 같이 3개 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다. 각 과목의 과제는 수준 Ⅰ의 과제를 제출한 후에만 수준Ⅱ의 과제를 제출할 수는 있다. 예를 들어 '국어A → 수학A → 국어B → 영어A → 영어B → 수학B ' 순서로 과제를 제출할 수 있다.

수준 \ 과목	국어	수학	영어
Ⅰ	국어A	수학A	영어A
Ⅱ	국어B	수학B	영어B

6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

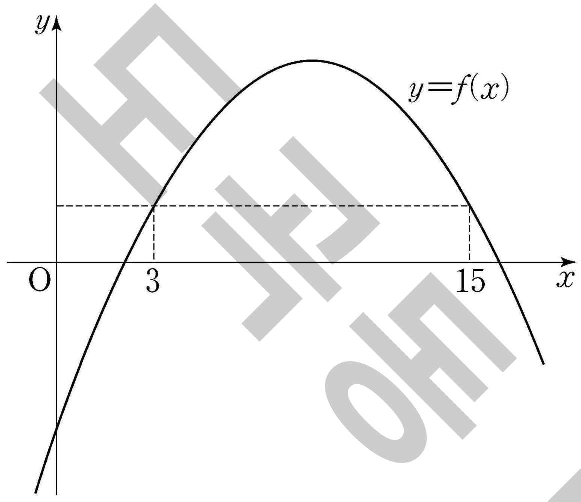
28. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.

29. 함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. m이 15보다 작은 자연수일 때,

$$a_m+a_{m+1}+\ldots+a_{15}<0$$

을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오. [4점]



30. 한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.
(나) 두 번째 시행부터
(1) 뒷면이 나오면 ○를 표시하고,
(2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ○, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	△	○	△	○	○

한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 △의 개수가 2개일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.