$g(0)>0$에 주목하여

곱 형태로 되어 있는 다항식 $f(x)g(x)$에서 $f(x)$와 $g(x)$를 구하여 보자.

$f(x)\times g(x)=x\times\left(x^3+\frac{1}{3}x^2\right)$

$f(x)\times g(x)=x^2\times\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)$

$f(x)\times g(x)=x^3\times\left(x+\frac{1}{3}\right)$

이 가능하다. 이 때, $f(x)\times g(x)=x\times\left(x^3+\frac{1}{3}x^2\right)$, $f(x)\times g(x)=x^2\times\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)$의 경우 항상 $g(0)=0$이다.

$g(0)>0$을 만족시키려면 $g(x)=k\left(x+\frac{1}{3}\right)$이고, $f(x)=\frac{1}{k}x^3$이어야 한다. $f(3)=3^n$이므로 $k=3^{3-n}$이고,

다항식 $g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지 a_n은 $a_n=g(1)=\frac{4}{3}\times k=36\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{36}{1-\frac{1}{3}}=54$이다.

고1때 배웠던 수1, 또는 그 이전에 배웠던 개념을 이용하여 출제한 문제입니다.
다항식의 인수분해, 나머지 정리, 인수 정리 등을 복습해보세요.
다항함수의 미분, 적분의 문제를 풀 때에도 직-간접적으로 쓰이는 개념입니다.