2017학년도 6월 귤모의고사

수학 영역(나형)

정답 및 해설지

2017학년도 6월 큘모의고사

수학 영역(나형)

1	①	2	④	3	②	4	⑤	5	③
6	①	7	②	8	①	9	②	10	②
11	④	12	④	13	④	14	②	15	③
16	①	17	⑤	18	⑤	19	①	20	②
21	④	22	2	23	3	24	96	25	4
26	1	27	369	28	361	29	439	30	610

1. $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$
$= (2^3)^{\frac{1}{2}} \times (2^{-3})^{\frac{1}{2}}$
$= (2^3 \times 2^{-3})^{\frac{1}{2}}$
$= 1^{\frac{1}{2}}$
$= 1$

1번 답 : ① 1

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}(3n+1)}{\frac{1}{n}\sqrt{3n^2+1}}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

2번 답 : ④ $\sqrt{3}$

3. $\frac{3+3}{2} = 3$ $\frac{3+5}{2} = 4$ $\frac{3+7}{2} = 5$
$\frac{5+5}{2} = 5$ $\frac{5+7}{2} = 6$ $\frac{7+7}{2} = 7$
$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $3+4+5+6+7 = 25$

3번 답 : ② 25

4. $\log_{\sqrt{a}} 9 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} 3^2$
$= \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_a 3 = 4\log_a 3 = 32$

4번 답 : ⑤ 32

5. 6명의 사람을 M_1, M_2, $\cdots$, M_6라고 할 때 이 티셔츠를 한 줄로 세운 뒤 앞에서 i번째 있는 티셔츠를 M_i이 갖는 것으로 하면 됩니다. 즉 같은 것이 있는 순열이므로 이것을 계산하면 $\frac{6!}{2!2!2!} = 120$

5번 답 : ③ 120

6. $a_1 = 3$, $a_2 = 9$에서 이 등비수열의 공비는 3임을 알 수 있습니다. 공비를 $r = 3$이라 하면
$a_{12} - a_{11}$
$= r^2 a_{10} - r^2 a_9 = r^2(a_{10} - a_9)$
$\therefore \frac{a_{12} - a_{11}}{a_{10} - a_9} = r^2 = 9$

6번 답 : ① 9

7. $\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^4$에서 x가 세 번, $\frac{k}{x^2}$가 한 번 곱해진 항을 계산하면 일차항을 얻고 그것에 $2x^3$을 곱하면 사차항을 얻습니다. x의 계수가 1이고 kx^{-2}의 계수는 k이므로 이항정리를 이용하여 아래 식을 얻습니다.
$2 \times {}_4C_1 \times 1^3 \times k^1$
$= 8k = -16$
$\therefore k = -2$

7번 답 : ② -2

8. $x < 0$일 때, $0 < x < 3$일 때, $x > 3$일 때는 각각 함수의 식이 일차함수로 나타나므로 각 구간에서 연속임은 뻔합니다. $x = 0$, $x = 3$ 두 점에서 연속성을 조사하되 둘 중 오직 한 곳만 불연속이어야 합니다. 그러면 $x = 0$에서만 불연속인 경우와 $x = 3$에서만 불연속인 경우로 나누어 생각할 수 있습니다.
$x = 3$에서만 불연속이라고 가정합시다.
$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(2x+3) = 3$이고 $x = 3$에서 불연속을 가정했기 때문에 $x = 0$에서는 연속입니다. 따라서 $a = 3$입니다. 그러면
$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 2x+3 = 9 = f(3)$이므로 $x = 3$에서도 연속이고 이는 가정과 모순입니다.
$x = 0$에서만 불연속을 가정합시다.
$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x+3) = 9 = a^2$이므로 $a = 3$또는 $a = -3$인데 $a = 3$이라면 방금 모순이 됨을 보였습니다. 따라서 이 경우는 $a = -3$입니다. 그러면 $x = 0$에서는 불연속이 됩니다. 이것이 우리가 원하는 답이므로 $a = -3$이 됩니다.

8번 답 : ① -3

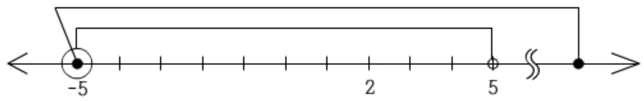
9. $f'(x) = 3x^2 + 4$에서
$f'(a-3) = f'(a-1)$
$\Rightarrow 3(a-3)^2 + 4 = 3(a-1)^2 + 4$
$\Rightarrow (a-3)^2 = (a-1)^2$
$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 = a^2 - 2a + 1$
$\Rightarrow 8 = 4a$
$\therefore a = 2$

9번 답 : ② 2

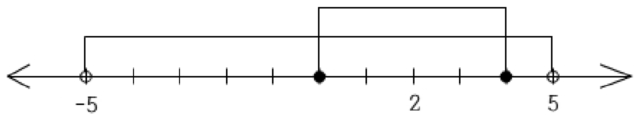
10. $\sum_{n=1}^{16} a_{2n}$
$= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{32}$
$= (a_2 + a_6 + \cdots + a_{30}) + (a_4 + a_8 + \cdots + a_{32})$
$= \sum_{k=1}^{8} a_{4k-2} + \sum_{k=1}^{8} a_{4k} = \sum_{k=1}^{8} (n^2+1) + \sum_{k=1}^{8} (2n+1)$
$= \sum_{k=1}^{8} (n^2+2n+2)$
$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 2 \cdot 8$
$= 292$

10번 답 : ② 292

11. 그림을 참고 합시다.
명제 p의 진리집합 $P = \{x \mid |x| < 5\}$
명제 q의 진리집합 $Q = \{x \mid |x-2| \le k\}$
p가 q이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$이고 k가 이를 만족하면서 최소가 되려면



즉 $m = 7$
p가 q이기 위한 필요조건이면 $P \supset Q$이고 k가 이를 만족하면서 최대가 되려면



즉 $M = 2$
$\therefore M + m = 9$

11번 답 : ④ 9

12. 각각이 공집합이 아니고 서로 어떠한 공통원소도 갖지 않는 세 집합을 합집합 한 것이 일정하게 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$입니다. 따라서 다음 두 가지 경우가 발생합니다.
i) 원소가 3개인 것이 하나, 1개인 것이 둘
일반성을 잃지 않고 편의상 A, B의 원소가 각각 한 개라고 둡시다. 그러면 A가 원소로 취할 수 있는 경우의 수는 5이고 B의 경우는 4입니다. 남은 세 개의 원소를 C한테 몰아주면 됩니다.
즉 이 경우는 모든 경우의 수가 $5 \times 4 = 20$인데 A가 세 개의 원소를 갖는 경우와 B가 세 개의 원소를 갖는 경우도 같은 계산을 얻습니다.
$20 \times 3 = 60 \ \cdots (1)$
ii)원소가 2개인 것이 둘, 1개인 것이 하나
일반성을 잃지 않고 편의상 A, B의 원소가 각각 두 개라고 둡시다. 그러면 A가 원소로 취할 수 있는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$이고 B의 경우는 ${}_3C_2 = 3$입니다. 남은 원소 하나를 C가 가지면 되겠습니다.
${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$이지만 마찬가지로 A, B가 각각 원소를 하나씩 가질 때도 같은 계산을 얻으므로
$30 \times 3 = 90 \ \cdots (2)$
$(1), (2)$에 의해 모든 경우의 수는 150개입니다.

12번 답 : ④ 150

13. $f(a-t) + f(a+t)$에서 $a+t$와 $a-t$는 a로부터 거리가 같은 실수입니다. a로부터 거리가 같은 두 실수의 함숫값을 더한 것이 t와 관계없이 일정하다는 것은 $y = f(x)$의 그래프가 $x = a$위의 어떤 점을 기준으로 점대칭이 된다는 것을 의미합니다. 그리고 그 점은 곧 주어진 유리함수의 두 점근선의 교점임을 쉽게 눈치 챌 수 있습니다.
$\therefore a = 2$
$f(2-t) + f(2+t)$
$= \frac{3(2-t)+7}{-t} + \frac{3(2+t)+7}{t}$
$= \frac{6t}{t} = 6 = b$
$\therefore b = 6$
$a + b = 8$

13번 답 : ④ 8

14. 먼저 주어진 이차함수를 정리합시다.
$g(x) = 2x^2 - 4px + 3p^2 - p + 1$
$\quad\ \ = 2(x-p)^2 + p^2 - p + 1$
이차함수라는 것은 최고차항의 계수가 양수이기만 하면 그 식이 어떻게 생겼든 간에 양옆과 위로 쭉쭉 뻗어나가는 그래프를 갖습니다. 유리함수의 그래프는 x축과 평행한 점근선 하나, 그리고 y축과 평행한 것 하나 총 두 개가 있는데 이차함수 그래프의 그러한 성질 때문에 y축과 평행한 점근선과 만나지 않는 일은 절대로 일어나지 않으며, 그 교점은 반드시 더도 말고 덜도 말고 딱 하나 존재합니다.
교점이 두 개라고 했는데 하나는 보장이 된 상태입니다. 그러니까 이제 x축과 평행한 점근선, 즉 $y = 3$과의 교점 또한 딱 하나만 발생해야 합니다. 이차함수의 그래프와 x축과 평행한 직선이 교점이 하나만 발생하는 경우를 계산하는 문제로 바뀐 것입니다.
그러면 답은 간단합니다. 관심 있는 점근선의 방정식이 $y = 3$이므로 주어진 이차함수의 꼭짓점의 y좌표가 3이기만 하면 됩니다. 단, 주의할 점은 꼭짓점의 y좌표$(p^2 - p + 1)$가 3이되 x좌표(p)가 2가 되어서는 안 됩니다. 그렇게 되면 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 정확히 두 점근선의 교점이 되니 모든 서로 다른 교점의 개수는 하나가 되겠죠.
$p^2 - p + 1 = 3$
$\Rightarrow p^2 - p - 2 = 0$
$\Rightarrow (p+1)(p-2) = 0$
$\therefore p = -1 \ (\because p \ne 2)$

14번 답 : ② -1

15. 눈을 크게 뜨고 주어진 항등식에 열심히 대입합니다.

$$Q_A=-kR\cdot 360\cdot\log\frac{5}{8}$$

$$\begin{aligned}Q_B&=-kR\cdot 360\cdot\log\frac{1}{16}\\&=-kR\cdot 360\cdot\log\left(\frac{5}{8}\times\frac{1}{10}\right)\\&=-kR\cdot 360\cdot\left(\log\frac{5}{8}-1\right)\\&=Q_A+360kR\\&=Q_A+60\end{aligned}$$

$$\therefore kR=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}Q_0&=-kR\cdot 300\log\frac{7}{70}\\&=-\frac{1}{6}\cdot 300\cdot(-1)\\&=50\end{aligned}$$

15번 답 : ③ 50

16. 어떤 함수가 일대일대응인지 판별하는 법은, 정의역이나 공역에 속하고 x축이나 y축에 평행한 임의의 직선과의 교점이 존재하고, 그 교점은 유일해야 한다는 것입니다. 주어진 문제는 정의역과 공역이 모두 실수 집합이므로 더 쉽게 말하면 주구장창 감소하든가 주구장창 증가하면서 연속이면 됩니다.

주어진 함수는 두 개의 일차함수로 이루어져 있습니다. 위에서 말한 것에 따르면, 두 일차함수의 기울기는 0이 아니고 부호가 같아야 합니다.

$(a+3)(a^2+5a)$
$=a(a+3)(a+5)>0$
$\Rightarrow a>0$ 또는 $-5<a<-3 \quad \cdots(1)$

또한 연속이어야 합니다.

$$f(x)=\begin{cases}(a+3)x+a^2+6a & (x<0)\\(a^2+5a)x-8 & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\{(a+3)x+a^2+6a\}=a^2+6a$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\{(a^2+5a)x-8\}=-8$$

$\therefore a=-2$ 또는 $-4 \quad \cdots(2)$

$(1),(2)$에 의해 $a=-4$

16번 답 : ① -4

17.

ㄱ. 이차함수 그래프는 유일한 극값을 갖고 그 점에서 미분계수는 0입니다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$가 이차함수이므로 적당한 실수 p에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $x=p$를 기준으로 대칭입니다.

(p가 이차함수 그래프의 꼭짓점의 x좌표입니다.)

그러면 f는 $x=p$에서 극값을 갖습니다. 또한 f가 $x=p+k$ $(k>0)$에서 극값을 갖는다면 $x=p-k$에서도 극값을 갖습니다. 다시 말하면 $|f(x)|$는 최소한 하나의 극값을 갖고, 짝수개의 극값을 갖는 일은 발생하지 않습니다. 따라서 주어진 함수는 항상 홀수 개의 극점을 갖습니다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(|x|)$는 y축 대칭인 그래프를 갖습니다. 그래서 이 함수는 항상 $x=0$에서는 극값을 갖습니다. 왜냐하면 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)$는 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)\leq 0$이거나 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)\geq 0$이거나 둘 중 하나입니다. (둘 다 일 수도 있지만) $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)\leq 0$이면 $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)\geq 0$이고 ($y$축 대칭이기 때문에) 이것은 곧 f가 $x=0$에서 극소임을 의미하고 그 반대 경우는 f가 $x=0$에서 극대임을 의미합니다.

또한 f가 y축을 기준으로 대칭이기 때문에 $x=k$ $(k>0)$에서 f가 극값을 가지면 $x=-k$에서도 극값을 가집니다. 따라서 f는 항상 홀수개의 극점만을 가집니다. (참)

17번 답 : ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. $n=k$일 때 $(*)$가 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$

입니다. 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$을 더한 후 정리하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\\&+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{k+3}}\right)\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{k+1}{2(k+3)}\right)\\&=\frac{1}{4}-\boxed{\frac{1}{2(k+2)(k+3)}}\end{aligned}$$

따라서 $f(k)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k+3}=\dfrac{k+1}{2(k+3)}$

$g(k)=\dfrac{1}{2(k+2)(k+3)}$

$$\frac{f(2)}{g(3)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{60}}=18$$

18번 답 : ⑤ 18

19. $f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(x-2)=0 \quad \cdots(1)$

$x\to 2+$일 때, 즉 x가 2랑 가깝긴 한데 2보다는 큰 쪽에서 2로 다가갈 때 $f(x)$는 0에 가까워지긴 하지만 0보다는 큽니다. $f(x)=t$라고 하면 $x\to 2+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=2 \quad \cdots(2)$

$t\to 0+$일 때, 즉 t가 0이랑 가깝긴 한데 0보다는 큰

쪽에서 0으로 다가갈 때 $f(t)$는 2에 가까워지긴 하지만 이것 역시 2보다는 큽니다. $f(t)=s$라고 하면 $t\to0+$일 때 $s\to2+$이므로

$$\lim_{x\to2+}f(f(f(x)))=\lim_{t\to0+}f(f(t))=\lim_{s\to2+}f(s)=0 \quad \cdots(3)$$

(1), (2), (3)에 의해여 구하는 답은 2입니다.

19번 답 : ① 2

20. 주어진 함수를 다시 써 봅시다.

$i) x<1$

$$\begin{aligned}f(x)&=|x-2|-|x-1|+x-1\\&=-(x-2)+(x-1)+x-1\\&=x\end{aligned}$$

$ii) 1\le x<2$

$$\begin{aligned}f(x)&=|x-2|-|x-1|+x-1\\&=-(x-2)-(x-1)+x-1\\&=-x+2\end{aligned}$$

$iii) x\ge 2$

$$\begin{aligned}f(x)&=|x-2|-|x-1|+x-1\\&=(x-2)-(x-1)+x-1\\&=x-2\end{aligned}$$

이를 정리하면

$$f(x)=\begin{cases}x & (x<1)\\ -x+2 & (1\le x<2)\\ x-2 & (x\ge 2)\end{cases}$$

ㄱ. $f(x)=0$를 만족하는 x는 0과 2이므로 그림을 통해 $a=2$입니다. (참)

ㄴ. 함수 $y=\dfrac{\{f(x)\}^2}{|f(x)|}$는 세 점 $x=0$, $x=1$, $x=2$을 제외한 모든 점에서 미분 가능함은 명백합니다.
왜냐하면 저 세 점 빼고 어떠한 점에서도 분모인 $f(x)$는 0이 아니며 $|f(x)|$가 미분 가능하고 $\{f(x)\}^2$또한 미분 가능하기 때문입니다. 분모가 0이 아니라는 것이 보장되면 미분 가능함수끼리 나누어도 미분 가능하다는 것을 알고 있습니다.
일단 함수가 지저분하니 정리합니다.

$$\frac{\{f(x)\}^2}{|f(x)|}=\frac{|f(x)|^2}{|f(x)|}=|f(x)|$$

그러면 이 함수의 그래프는 세 점 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 뾰족한 점이 발생하므로 미분 불가능 합니다.
(수식에 의한 설명은 생략하도록 하겠습니다.) (참)

ㄷ. 이 함수 또한 두 점 $x=1$, $x=2$을 제외한 모든 점에서 미분 가능함은 쉽게 알 수 있으니 이 두 점에서만 미분 가능여부를 조사해 봅시다.
$\{f(x)\}^2$의 도함수는 $2f'(x)f(x)$임을 이용합시다.

$i)$ $x=1$에서

$$\lim_{x\to1-}2f'(x)f(x)=\lim_{x\to1-}\{2\cdot1\cdot x\}=2$$
$$\lim_{x\to1+}2f'(x)f(x)=\lim_{x\to1+}\{2\cdot(-1)\cdot(-x+2)\}=-2$$

$x=1$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 일치하지 않으므로 주어진 함수는 $x=1$에서 미분 불가능합니다.

$ii) x=2$에서

$$\lim_{x\to2-}2f'(x)f(x)=\lim_{x\to2-}\{2\cdot(-1)\cdot(-x+2)\}=0$$
$$\lim_{x\to2+}2f'(x)f(x)=\lim_{x\to2+}\{2\cdot(-1)\cdot(x-2)\}=0$$

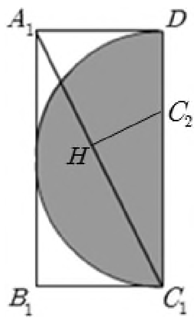
$x=2$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 일치하므로 주어진 함수는 $x=2$에서 미분이 가능합니다.
따라서 함수 $y=\{f(x)\}^2$는 한 점에서만 미분이 불가능합니다. (거짓)

20번 답 : ② ㄱ, ㄴ

21. S_1은 반지름이 1인 반원의 넓이이므로 $S_1=\dfrac{\pi}{2}$

직사각형 $A_nB_nC_nD$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D$는 닮음이고, 그 닮음비가 n에 관계없이 일정하므로 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$또한 n에 관계없이 일정합니다. 따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}$만 구하면 충분하고, $\dfrac{S_2}{S_1}=r$이라 하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}$이 됩니다.

$\overline{C_1D}$위의 어떤 적당한 점을 잡아서 그 점으로부터 점 D까지의 거리와 직선 A_1C_1에 내린 수선의 길이가 같을 때, 그 점을 C_2라고 잡았다고 할 수 있습니다. 그러한 점 C_2를 잡았다고 하고, C_2에서 직선 A_1C_1에 내린 수선의 발을 H라고 합시다. 그리고 $\overline{C_2D}=\overline{C_2H}=k$라고 합시다.



그러면 $\triangle A_1DC_1$과 $\triangle C_2HC_1$은 닮음이므로

$\overline{A_1D}:\overline{A_1C_1}=\overline{C_2H}:\overline{C_2C_1}$입니다. 즉

$$\begin{aligned}&1:\sqrt5=k:2-k\\&\Rightarrow k\sqrt5=2-k\\&\Rightarrow k(\sqrt5+1)=2\\&\Rightarrow k=\frac{2}{\sqrt5+1}=\frac{\sqrt5-1}{2}\end{aligned}$$

이 때 큰 반원의 반지름이 1이고 작은 반원의 반지름이 $\dfrac{\sqrt5-1}{2}$이므로

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{\frac{\sqrt5-1}{2}}{1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt5}{2}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{3-\sqrt5}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt5-1}{2}}=\frac{\pi(\sqrt5+1)}{4}$$

21번 답 : ④ $\dfrac{\pi(\sqrt5-1)}{4}$

22. $$\begin{aligned}&(f\circ f^{-1}\circ f)(1)\\&=(f\circ f^{-1})(f(1))\\&=(f\circ f^{-1})(2)\\&=f(f^{-1}(2))\\&=f(1)\\&=2\end{aligned}$$

22번 답 : 2

23. $\mathrm{P}(A\cup B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-p$
$=\dfrac{2}{3}$
$\therefore p=\dfrac{1}{6}$
$18p=3$

23번 답 : 3

24. 먼저 6 (또는 9)가 쓰여 진 카드를 6으로 사용할 경우의 수를 먼저 계산합니다.
i) 한 자리 자연수
$1, 6, 8$ 총 3개
ii) 두 자리 자연수
십의 자리로 올 수 있는 카드의 수는 3장 (0 제외)이고 일의 자리로 올 수 있는 카드의 수는 3장 (십의 자리에서 쓴 카드 제외)이므로 총 $3\times3=9$개
iii) 세 자리 자연수
(ii)와 같은 방법으로 총 $3\times3\times2=18$개
iv) 네 자리 자연수
$(ii), (iii)$과 같은 방법으로 총 $3\times3\times2\times1=18$개
$(i), (ii), (iii), (iv)$에 의해 모두 48개의 경우의 수가 발생합니다.
6 (또는 9)가 쓰여 진 카드를 9로 사용할 경우도 같은 계산을 얻으므로, 구하려는 답은 96입니다.

24번 답 : 96

25. a_n의 일반항이 뭔 진 잘 모르겠지만 $0<a_n<n$임은 확실합니다. 즉
$\dfrac{4n^3}{n^3}<\dfrac{2(a_n)^2+3na_n+4n^3}{n^3}<\dfrac{2n^2+3n^2+4n^3}{n^3}$이고
샌드위치 정리에 의하여
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{n^3}\le\lim_{n\to\infty}\frac{2(a_n)^2+3na_n+4n^3}{n^3}$$
$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n^2+4n^3}{n^3}$$
$$4\le\lim_{n\to\infty}\frac{2(a_n)^2+3na_n+4n^3}{n^3}\le4$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{2(a_n)^2+3na_n+4n^3}{n^3}=4$$

25번 답 : 4

26. 먼저 p가 q이기 위한 충분조건이므로 p, q의 진리집합 P, Q에 대하여 $P\subset Q$입니다. 즉
$-a^2+4a\le3$이고 $6\le-4a+18$이면 충분합니다.
$\therefore (a-1)(a-3)\ge0$ 그리고 $4(a-3)\le0$
$\Rightarrow a\le1$ 또는 $a=3$
그런데 p가 q이기 위한 필요조건이어서는 안 되므로 (필요충분조건은 아니므로) $P\ne Q$입니다. 즉 $a\ne3$입니다. 따라서 주어진 조건을 모두 만족하는 a의 범위는
$$a\le1$$
이고 a의 최댓값은 1이 됩니다.

26번 답 : 1

27. $12=2^2\times3$
$80=2^4\times5$
$150=2\times3\times5^2$
그리고 $300=2^2\times3\times5^2$
$\dfrac{abc}{300}$가 정수가 된다는 것은 abc를 소인수분해 했을 때 2의 지수가 2이상, 3의 지수가 1이상, 5의 지수가 2이상이어야 한다는 뜻입니다. 2라는 하나의 소인수에만 집중하여 생각한다면, a의 소인수분해는 2가 없을 수도 있고, 하나 있을 수도 있고 두 개 있을 수도 있습니다. b의 소인수분해는 2가 없을 수도 있고 최대 4개 까지 있을 수 있고 c같은 경우는 없거나 하나 있습니다. 이 상황에서 a, b, c가 각각 갖고 있는 2의 개수가 다 합쳐서 두 개가 넘는 모든 경우 수를 다 세면 됩니다. 3이나 5도 마찬가지이죠.
a, b, c의 소인수분해에서 2의 지수를 각각 a_2, b_2, c_2라고 합시다. a_2, b_2, c_2의 가능한 모든 순서쌍의 개수는
$3\times5\times2=45$입니다.
(왜냐하면 $a_2=0,1,2$, $b_2=0,1,2,3,4$, $c_2=0,1$)
이 45개의 경우 수 중 아래의 순서쌍만 제외하면 됩니다.
(a_2, b_2, c_2)
$=(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$
따라서 가능한 모든 순서쌍 중 조건을 만족하는 순서쌍은 41개 존재합니다.
같은 방법으로 3에 대해서도 5에 대해서도 세어내면 됩니다. a, c의 소인수분해에서 3의 지수를 각각 a_3, c_3이라고 하면 가능한 모든 순서쌍의 개수는 $2\times2=4$입니다. 조건을 만족하지 않는 순서쌍은
$(a_3, c_3)=(0,0)$
뿐이므로 가능한 모든 순서쌍 중 조건을 만족하는 순서쌍은 3개 존재합니다.
마찬가지로 5에 대해서 가능한 모든 순서쌍은 6개이고 제외되는 순서쌍은 3개 있으므로 조건을 만족하는 순서쌍은 3개 존재합니다.
따라서 구하는 답은 $41\times3\times3=369$개입니다.

27번 답 : 369

28. 그림처럼 10명의 사람을 각 i에 대하여 M_i $(i=1,2,\cdots,10)$이라고 합시다. 각각의 사람은 왼쪽을 돌아보거나 오른쪽을 돌아보거나 두 개의 선택지가 있습니다. 따라서 생각할 수 있는 모든 경우의 수는
$2^{10}=1024 \qquad \cdots(1)$
문제에서 제시하는 상황을 수식으로 표현하기 어려우니 이 상황을 나타낼 수 있는 표기를 하나 약속합시다.

문자열 $k_1k_2\cdots k_{10}$에 대하여 M_i가 왼쪽으로 돌았으면 $k_i=1$이고 오른쪽으로 돌아봤으면 $k_i=0$이라고 약속합시다. 가령 M_1은 왼쪽으로 돌고 나머지 9명은 오른쪽으로 돌았다면

$$1000000000$$

으로 표기합니다. 이 표기를 통해 두 사람이 마주볼 조건을 생각해봅시다. M_1, M_2, $\cdots$, M_{10}가 순서대로 시계방향으로 붙여진 이름이므로 M_n이 왼쪽을 보고 M_{n+1}이 오른쪽을 보면 두 사람은 마주보게 됩니다.

$(n=1,2,\cdots,9)$

또는 M_{10}이 왼쪽을 보고 M_1이 오른쪽을 보면 두 사람은 마주보게 됩니다. 즉, 아까 약속한 문자열에서 "10"이 포함될 때마다 마주보는 사람은 2명씩 생기고, $k_{10}=1$이고 $k_1=0$이면 이 두 사람도 마주보게 됩니다. 그런데 $k_{10}=1$이고 $k_1=0$인 경우는 아무래도 세기가 귀찮습니다. 그래서 $k_1=1$이라고 일단 가정합시다. 그러면 약속한 문자열은 반드시 아래와 같은 형태로 나타나야만 합니다.

1....10...01...10...01...10...0

또는

1...10...01...10...01...10...01...1

그러니까, 이웃한 두 사람이 연속하여 같은 곳을 바라볼 수도 있고, 다른 곳을 바라볼 수도 있습니다. 이 때 이웃한 두 사람이 다른 곳을 바라보는 쌍은 5쌍이나 6쌍만 나타나야만 한다는 것입니다. 이 방법 외에는 6명이 마주보는 상황을 만들 수 없습니다.

1...10...01...10...01...10...0의 형태 먼저 살펴봅시다. 맨 처음에 연속 되는 1의 개수를 a_1, 그 다음에 연속 되는 0의 개수를 a_2, 그 다음 연속 되는 1의 개수를 a_3, ... 와 같은 식으로 $a_1,a_2,\cdots,a_6$를 생각하면

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=10$$

을 만족하는 자연수 a_i $(i=1,2,\cdots,6)$의 순서쌍의 개수와 같습니다. 즉

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=4$$

을 만족하는 음이 아닌 정수 a_i $(i=1,2,\cdots,6)$의 순서쌍의 개수와 같습니다. (자주 쓰이는 스킬이므로 자세한 설명은 생략합니다.) 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_6H_4={}_9C_4=126$

1...10...01...10...01...10...01...1의 형태도 마찬가지입니다. $a_1,\cdots,a_7$까지 위와 같은 방법으로 정의한 후

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=10$$

을 만족하는 자연수 a_i $(i=1,2,\cdots,7)$의 순서쌍의 개수이고

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=3$$

을 만족하는 음이 아닌 정수 a_i $(i=1,2,\cdots,7)$의 순서쌍의 개수이므로 ${}_7H_3={}_9C_3=84$입니다. 따라서 M_1이 왼쪽을 돌아본다는 가정에서 조건을 만족하는 모든 경우의 수는 $126+84=210$입니다.

지금까지 구한 210개의 경우에서 왼쪽으로 돌아본 사람은 오른쪽으로, 오른쪽으로 돌아본 사람은 왼쪽으로 돌아보게 하면

(가령 1110010000을 0001101111 로 바꾸면)

지금까지 센 210개의 경우와 하나도 겹치지 않고 주어진 조건을 모두 만족하며 앞에서 세지 않은 모든 나머지 경우를 셀 수 있습니다. 따라서 M_1이 왼쪽을 돌아봤다고 가정해도 조건을 만족하는 210개의 경우를 얻습니다. 최종적으로 조건을 만족하는 경우의 수는 420입니다. $\cdots(2)$

(1), (2)에 의해 구하는 답은

$\dfrac{420}{1024}=\dfrac{105}{256}$에서 $p=105$, $q=256$

$\therefore p+q=361$

28번 답 : 361

29. 임의의 자연수 n에 대해서 $a_n=1$이거나 $a_n=-1$입니다. 우리의 목표는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{1001}a_n$을 최대한으로 크게 하는 것이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{7n}=\lim_{n\to\infty}a_{11n}=\lim_{n\to\infty}a_{13n}=-1$을 만족시키도록 하는 최소한의 항만 -1로 두고 나머지 항의 값을 1로 갖는 수열을 생각합시다.

1001은 7, 11, 13의 최소공배수입니다. 만약 $a_7,a_{14},a_{21},\cdots,a_{1001}$ 중에 하나라도 1이 된다고 해봅시다. 그러면 $a_n=a_{n+1001}$이므로 수열 $\{a_{7n}\}$의 항을 나열하면 아래와 같습니다.

$$-1,-1,\cdots,-1,1,-1,\cdots,-1,1,-1,\cdots$$

즉 수열의 극한이 존재하지 않습니다. (존재한다고 하면 그 극한은 1일 수밖에 없습니다.) 따라서 $a_{7n}=-1$ $(n=1,2,\cdots)$입니다.

같은 방법으로, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{11n}=a_{13n}=-1$입니다. 7배수, 11배수, 또는 13배수 번째 항이라면 빠짐없이 -1이어야 합니다.

그러면 우리가 구해야 할 것은 1001이하의 7배수의 집합, 11배수의 집합, 13배수의 집합을 A,B,C라고 할 때 $n(A\cup B\cup C)$입니다. 이를 계산하면

$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\&=143+91+77-13-7-11+1\\&=281\end{aligned}$$

즉 $a_1,a_2,\cdots,a_{1001}$ 중에 281개의 -1이 있고 $1001-281=720$개의 1이 있도록 하고 주어진 조건을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 존재하며 그 수열에 대해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{1001}a_n=(-1)\times281+1\times720=439$입니다. 또한

이것보다 $\sum_{n=1}^{1001} a_n$의 값을 크게 할 수 있는 수열은 존재하지 않습니다.

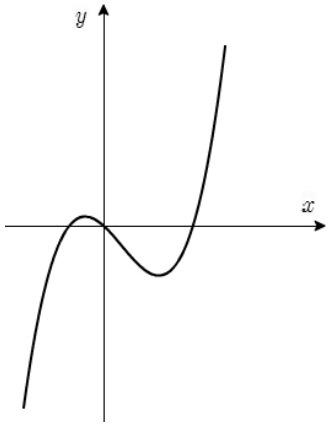
29번 답 : 439

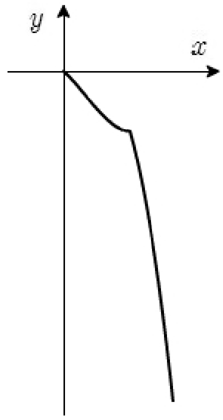
30. 함수 g와 h의 정의에 의하면 g와 h는 각각 구간 $[-t,t]$에서 f의 최솟값과 최댓값입니다. 즉 연속함수입니다. 먼저 f는 증가함수도 아니고 감소함수도 아닙니다. 만약 그렇다면 g, h는 모든 점에서 미분 가능해야 합니다. 따라서 f는 두 개의 극점을 갖습니다. 또한 $g(t)$는 $f(t)$이거나 $f(-t)$입니다. 즉 구간의 왼쪽 끝이나 오른쪽 끝에서만 최솟값을 가져야 합니다. 그렇지 않다면, f가 어떤 구간 $[-t_0, t_0]$에서 양 끝점이 아닌 점 $x=k$에서 최솟값을 갖는다는 뜻인데, 그러면 구간 $[-k, k]$에서도 $x=k$에서 최솟값을 갖습니다. 더 나아가 $k \le t \le t_0$이면 구간 $[-t,t]$에서 항상 $x=k$에서 최솟값을 갖습니다. 즉 $k \le t \le t_0$이면 $g(t)=f(k)$를 의미하고 이는 $g'(t) \ne 0$이라는 것에 모순입니다.
두 극점의 x좌표의 부호가 같아서도 안 됩니다. 만약 둘 다 양수라고 하면 구간 $[-t, t]$에서 최솟값은 항상 $x=-t$에서 가지므로 $g(t)=f(-t)$입니다. 이것은 g가 미분 가능함수임을 의미하여 미분 불가능한 점이 있다는 것에 모순이고, 두 극점의 x좌표가 모두 음수일 때도 비슷하게 모순을 얻습니다. 따라서 두 극점 사이에는 $x=0$이 있습니다.
그러면 거의 다 했습니다. $\lim_{t \to 3-} g'(t) = 0$이고 $g'(t) \ne 0$이므로 $t \le 3$이면 $g(t)=f(t)$이고 $t \ge 3$이면 $g(t)=f(-t)$입니다. 이렇게 해야 g가 $t=3$에서 미분이 불가능 해질 것입니다. 그렇다면 $f(3)=f(-3)$입니다. 게다가 $f'(3)=0$임 까지 알 수 있습니다.
$f(x)$를 구해봅시다. $f(0)=0$이므로 적당한 상수 a,b에 대해 $f(x)=x^3+ax^2+bx$라고 놓을 수 있습니다.
$f(3)=f(-3)$이므로 $27+9a+3b=-27+9a-3b$, 즉 $b=-9$
$f'(3)=0$이므로 $f'(x)=3x^2+2ax-9$에 $x=3$을 대입하면

$$f'(3) \\ =27+6a-9 \\ =0 \\ \therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x$이고 $f(10)=610$

참고로 $y=f(x)$의 그래프는 아래 왼쪽의 그림과 같고, 그것을 바탕으로 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 아래 오른쪽의 그림과 같습니다. g가 미분 불가능 한 점은 $(3, -54)$입니다.





30번 답 : 610