2016년 3월 교육청 가형 28번 4점

함수 $f(x)=\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x),\quad b=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

일 때, $a+\frac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오. [4점][1)]

2016년 6월 평가원 가형 16번 4점

$\int_1^e x(1-\ln x)dx$ 의 값은? [4점][2)]

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$

④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

2016년 9월 평가원 가형 21번 | 4점

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2} f(t)dt$

$f(1) = \frac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점][3)]

① $\frac{16}{3e^4}$　② $\frac{6}{e^4}$　③ $\frac{20}{3e^4}$　④ $\frac{22}{3e^4}$　⑤ $\frac{8}{e^4}$

2006년 교육청 4점

$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \ dx \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때,

옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? 4)

[보 기]

ㄱ. $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$

ㄴ. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{51}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2008년 평가원 3점

좌표평면에서 곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{2}{3}x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은? 5)

① $\frac{5}{3}ln2-\ln3$ ② $2\ln3-\frac{5}{3}ln2$ ③ $\frac{5}{3}ln2+\ln3$

④ $2\ln3+\frac{5}{3}ln2$ ⑤ $\frac{7}{3}ln2-\ln3$

2010년 평가원 3점

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? 6)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

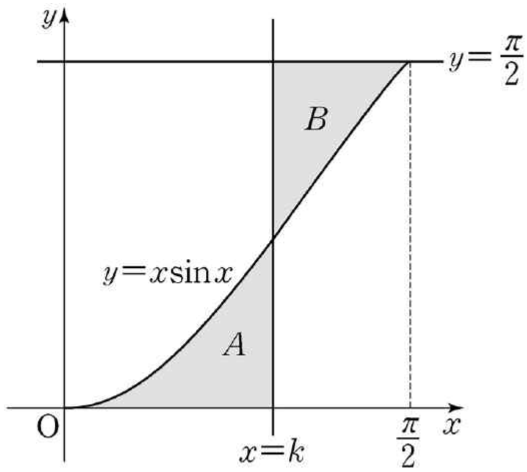
2011년 수능 3점

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,
$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\ (a>0,\ 0<k<1)$ 일 때, $\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? 7)

① $\frac{k^2}{4}$　② $\frac{k^2}{2}$　③ k^2
④ k　⑤ $2k$

2011년 평가원 4점

그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은? (단, $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$) 8)



① $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$

④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}$　⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}$

2011년 평가원 4점

정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)^2}$ 이고, 함수 $g(x) = x^2$ 일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = \frac{1}{6}$$

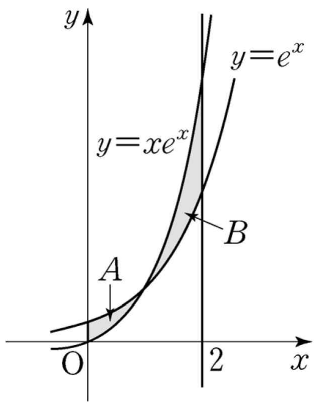
이다. $f(1)$ 의 값은? 9)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

2012년 수능 4점

그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 y축으로 둘러싸인 부분 A의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분 B의 넓이를 b라 할 때, $b-a$의 값은? 10)



① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

2013년 평가원 4점

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$g\left(e^{x}\right)=\begin{cases} f(x) & (0 \leqq x<1) \\ g\left(e^{x-1}\right)+5 & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_{1}^{e^{2}} g(x) d x=6 e^{2}+4$이다.

$\int_{1}^{e} f(\ln x) d x=a e+b$일 때, $a^{2}+b^{2}$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) 11)

2013년 평가원 4점

함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 에 대하여

$F(x)=\displaystyle\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x\geq 0)$일 때, $F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. 12)

2014년 수능 4점

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

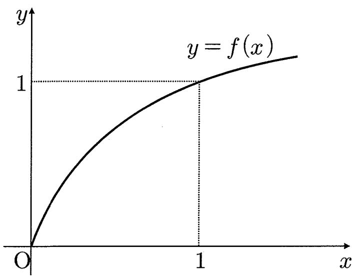
$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$의 값은?[13)]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

2005년 수능 4점

다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때,

극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$와 같은 값을 갖는 것은?[14)]

① $\int_0^1 g(x)\,dx$　② $\int_0^1 xg(x)\,dx$　③ $\int_0^1 f(x)\,dx$

④ $\int_0^1 xf(x)\,dx$　⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx$

2013년 교육청 4점

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=1$

(나) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 값은? 15)

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$

④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

1) 정답 51

[출제의도] 치환적분법을 이해하고 정적분 문제를 해결한다.

$f(x)=\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에서

$$f(\pi-x)=\frac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}}$$

$$=\frac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}}$$

$$=\frac{e^{-\cos x}\times e^{\cos x}}{(1+e^{-\cos x})\times e^{\cos x}}$$

$$=\frac{1}{e^{\cos x}+1}$$

그러므로

$a=f(\pi-x)+f(x)$

$$=\frac{1}{e^{\cos x}+1}+\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$$

$$=\frac{1+e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=1$$

$$b=\int_0^\pi f(x)dx$$

$$=\int_0^\pi\{1-f(\pi-x)\}dx$$

$$=\int_0^\pi 1\,dx-\int_0^\pi f(\pi-x)dx$$

$\pi-x=t$ 로 놓으면

$x=\pi-t$ 이므로 $\frac{dx}{dt}=-1$

$x=0$ 일 때, $t=\pi$ 이고

$x=\pi$ 일 때, $t=0$ 이므로

$$b=\pi+\int_\pi^0 f(t)dt$$

$$=\pi-\int_0^\pi f(t)dt=\pi-b$$

$b=\pi-b$ 이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

따라서 $a+\frac{100}{\pi}b=1+\frac{100}{\pi}\times\frac{\pi}{2}$

$=1+50=51$

[다른풀이]

$$b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)+f(\pi-x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

2) 정답 ⑤

$x = f'(x)$, $1-\ln x = g(x)$라 하면

$$\int_1^e f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_1^e - \int_1^e f(x)g'(x)dx$$

임을 이용하자.

$$\int_1^e x(1-\ln x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) + \int_1^e \frac{1}{2}xdx$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(e^2-3)$$

3) 정답 ③

$$g(x) = \frac{4}{e^2}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$$

$$= \frac{2}{e^2}\int_1^x 2te^{t^2}\frac{f(t)}{t}dt$$

이 때, $u' = 2te^{t^2}$, $v = \dfrac{f(t)}{t}$라 하면

$u = e^{t^2}$, $v' = t^2e^{-t^2}$ 이다.

그러므로 부분적분법에 의하여

$$g(x) = \frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x t^2dt\right\}$$

$$= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x} - ef(1) - \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$

$$= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x} - ef(1) - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$g(2) = \frac{2}{e^4}\left(e^4\frac{f(2)}{2} - \frac{10}{3}\right)$$

$$= f(2) - \frac{20}{3e^4}$$

그러므로 $f(2) - g(2) = \dfrac{20}{3e^4}$

4) 정답 ③

ㄱ. $a_1 + a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx$

$\tan x = t$ 일 때, $\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 마찬가지로 생각하면

$a_2 + a_4 = \int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. 일반적으로 $a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4}$

$= (a_{4k+1} + a_{4k+3}) + (a_{4k+2} + a_{4k+4})$

$= \int_0^1 t^{4k+1}\, dt + \int_0^1 t^{4k+2}\, dt = \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=0}^{24} (a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4})$

$= \sum_{k=0}^{24} \left(\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}$ (거짓)

5) ①

곡선과 직선의 교점의 좌표를 구한다.

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$ 에서

$xe^{x^2}=\frac{2}{3}xe^{x^2}+\frac{2}{3}x$, $\frac{1}{3}x\left(e^{x^2}-2\right)=0$

$x=0$ 또는 $e^{x^2}-2=0$

$e^{x^2}=2$ 에서 $x^2=\ln 2$ $\quad\therefore\ x=\pm\sqrt{\ln 2}$

따라서, 구하는 넓이 S 는

$S=2\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$

$=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\frac{4}{3}x\,dx-\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}-\left[\ln\left(e^{x^2}+1\right)\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$=\frac{2}{3}\ln 2-(\ln 3-\ln 2)$

$=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$

6) 정답 ④

$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$ 에서

$tx=y$ 로 놓으면

$t=\frac{dy}{dx}$ 에서 $dx=\frac{dy}{t}$

$x=0$ 일 때, $y=0$

$x=2$ 일 때, $y=2t$

이므로

$\int_0^2 xf(tx)dx=\int_0^{2t}\frac{y}{t}f(y)\frac{dy}{t}$

$=\frac{1}{t^2}\int_0^{2t}yf(y)dy=4t^2$

$\therefore\ \int_0^{2t}yf(y)dy=4t^4$

양변을 t 에 관하여 미분하면

$2tf(2t)\times(2t)'=16t^3$

$\therefore\ f(2t)=4t^2$,$\therefore\ f(2)=4$

7) 정답 ④

조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로

$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx$$

$$=[-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx \ (\because \text{부분적분법})$$

$$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$

$$=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면 $2dx=dt \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$\begin{cases}x=a\rightarrow t=2a\\ x=20\rightarrow t=4a\end{cases}$로 변환되므로

$$=\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

8) ③

$$\int_0^k x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x\sin x dx)dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx-\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx+\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx$$

이때, $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$라고 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$ 이므로

(좌변)$=[-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\, dx$

$$=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

(우변)$=[\frac{\pi}{2}x]_k^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k$

따라서 $1=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}k$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}k=\frac{\pi^2}{4}-1$$

$$\therefore\ k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$$

9) 정답 ④

$\int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx$

$=f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$

$g(1)=1,\ g(0)=0$이고

$1+x^3=t$로 치환하면

$f(1)-\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt=f(1)-\frac{1}{6}$

$f(1)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}$

10) ③

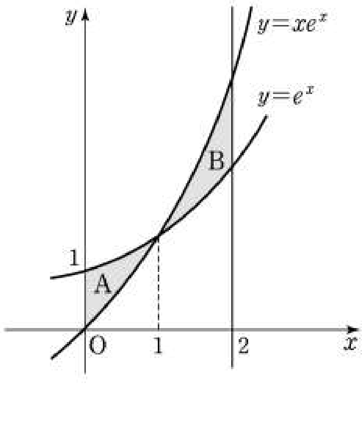
두 부분의 넓이의 차 $b-a$는 $y=xe^x-x$의 정적분 결과와 같다.

$b-a=\int_0^2 (xe^x-e^x)dx$

$=\int_0^2 (x-1)e^x dx$

$=\left[(x-1)e^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx$

$=1-(-e^2)-(e^2-1)=2$



11) 정답 17

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ f(x-1)+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$ 에서

$$g(x)=\begin{cases} f(\ln x) & (0\le x<e) \\ f(\ln x-1)+5 & (e\le x\le e^2)\end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x)dx$$

$$=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\{f(\ln x-1)+5\}dx$$

$$=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\left\{f\left(\ln\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx$$

$$=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_1^e\{f(\ln y)+5\}e\,dy$$

$$=(e+1)\int_1^e f(\ln x)dx+5e(e-1)=6e^2+4$$

$$\therefore \int_1^e f(\ln x)dx=\frac{e^2+5e+4}{e+1}=e+4$$

$\therefore a=1,\ b=4$ $\qquad$ $\therefore\ a^2+b^2=17$

[다른 풀이]

$y=e^x$로 고치면,

$$g(y)=\begin{cases} f(\ln y) & (1\le y\le e) \\ g\left(\frac{y}{e}\right)+5 & (e\le y\le e^2)\end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(y)dy=\int_1^e f(\ln y)dy+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy=6e^2+4$$

$\frac{y}{e}=t,\ dy=e\,dt$라 두면, $\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy=e\int_1^e g(t)dt+5e^2+5e$

$\int_1^e g(t)dt=\int_1^e f(\ln t)dt$이므로

$$\int_1^{e^2} g(y)dy=(1+e)\int_1^e f(\ln y)dy+5e^2+5e=6e^2+4$$

$\therefore \int_1^e f(\ln y)dy=e+4$ $\qquad$ $\therefore a=1, b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=17$

12) 정답 9

출제의도 : 적분법 - 정적분으로 표시된 함수

$F(x) = \int_0^x t f(x-t)dt \ (x \ge 0)$ 에서

$x-t = y$ 치환하면

$-dt = dy$

$t = 0$ 이면 $y = x$

$t = x$ 이면 $y = 0$

$\therefore F(x) = \int_x^0 (x-y)f(y)(-dy)$

$= \int_0^x (x-y)f(y)dy$

$F(x) = x\int_0^x f(y)dy - \int_0^x y f(y)dy$

양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x) = \int_0^x f(y)dy + xf(x) - xf(x)$

$\therefore F'(x) = \int_0^x f(y)dy$

x의 값에 a를 대입하면

$F'(a) = \int_0^a f(y)dy$

$= \int_0^a \frac{1}{1+y}dy$

$= [\ln|1+y|]_0^a$

$= \ln(a+1)$

$\ln(a+1) = \ln 10$ 이므로

$\therefore a = 9$

[별해] 정적분의 기본정리

$x-t=s\,(t=x-s,\ -dt=ds)$**로 치환한다.**

$F(x) = \int_x^0 (x-s)f(s)(-ds)$

$= \int_0^x (x-s)f(s)ds$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\left\{x\int_0^x f(s)ds - \int_0^x s f(s)ds\right\}$

$= \int_0^x f(s)ds$

$\int_0^x \frac{1}{1+s}ds = [\ln|1+s|]_0^x$

$= \ln|1+x| = \ln 10 \qquad \therefore x = 9$

13) 정답 ①

$y=f9x)$의 그래프가 연속이고

원점에 대하여 대칭이므로

$f(0)=0$이고 $f(-1)=-f(1)=-1$

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)\,dt$에서 양변을 미분하면

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$$

$f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$에서

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx=\pi^2\int_0^1\frac{2}{\pi}xf'(x)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 xf'(x)\,dx=2\pi\left\{\Big[xf(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx\right\}$$

$$=2\pi\left(f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx\right)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(t+1)\,dt=\int_{-1}^0 f(x+1)\,dx$$

$$=\int_{-1}^0\frac{2}{\pi}f'(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^0 f'(x)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}(f(0)-f(-1))=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore\ \pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=2(\pi-2)$$

14) 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)-g\left(\frac{0}{n}\right)\right\}+\frac{2}{n}\left\{g\left(\frac{2}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$+\ \cdots\ +\frac{n}{n}\left\{g\left(\frac{n}{n}\right)-g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{n}\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}+g(1)$$

$$=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\therefore(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}=1-\int_0^1 g(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

15) 정답 ⑤

[출제의도] 무한급수와 관련된 문제를 정적분의 정의를 이용하여 해결한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$

$+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots$

$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots$

$-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$

$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}=x_k$라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{8}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$

$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$